

令和 5 年度
前期日程

数学

教育学部 [数学(口)]

医学部医学科

工学部

応用生物科学部 [数学(口)]

問題冊子

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子は 5 ページで、解答用紙は 5 枚である。
落丁、乱丁、印刷不鮮明などの箇所があった場合には、ただちに試験監督者に申し出ること。
3. 受験番号は、5 枚の解答用紙のそれぞれの指定箇所に必ず記入すること。
4. 問題は、大問 5 題である。
5. 大問の配点比率は全て 20 % である。
6. 解答は、解答用紙の指定箇所に記入すること。ただし、やむをえない場合は裏面にまわって
よいが、表面に「裏に続く」と明記すること。
7. 問題用紙の余白は計算に用いてよい。
8. 解答用紙は持ち帰らないこと。
9. 問題冊子は持ち帰ること。

1 1辺の長さが1の正四面体OABCがある。辺ABを1:2に内分する点をP、線分OPをs:(1-s)に内分する点をQとする。 $\triangle ABC$ の重心をGとする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。以下の間に答えよ。

- (1) \overrightarrow{OQ} , \overrightarrow{QG} をs, \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いてそれぞれ表せ。
- (2) $\overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{QG}$ であるとき, sの値を求めよ。
- (3) sを(2)で求めた値とするとき, $\triangle OQG$ の面積を求めよ。
- (4) sを(2)で求めた値とするとき, $\tan(\angle OGQ + \angle OPG)$ の値を求めよ。

2 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = (\sqrt{2} - 1)a_n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。このとき、 a_n は整数 p_n, q_n を用いて

$$a_n = p_n + \sqrt{2}q_n$$

と表せる。以下の間に答えよ。

- (1) p_1, p_2, q_1, q_2 を求めよ。
- (2) p_{n+1}, q_{n+1} を p_n と q_n を用いてそれぞれ表せ。
- (3) $b_n = a_n - (2 + \sqrt{2})$ とする。 b_{n+1} を b_n を用いて表せ。また、 b_n を n を用いて表せ。
- (4) $c_n = p_n - \sqrt{2}q_n$ とする。 c_{n+1} を c_n を用いて表せ。
- (5) p_n, q_n を n を用いてそれぞれ表せ。

3

下図のように、縦2列、横3列に並んだ6つのマスがある。また、1, 2, 3, 4, 5, 6の6個の数字がそれぞれ書かれたカードが1枚ずつある。すべてのカードを各マスに1枚ずつ置いていき、6つのマスに6枚のカードを並べる。上列の3つの数の積を a_1 、下列の3つの数の積を a_2 、左列の2つの数の積を b_1 、中央列の2つの数の積を b_2 、右列の2つの数の積を b_3 とする。以下の間に答えよ。



- (1) a_1 が奇数となるような6枚のカードの並べ方は何通りあるか。
- (2) a_1 が偶数となるような6枚のカードの並べ方は何通りあるか。
- (3) b_1 が偶数となるような6枚のカードの並べ方は何通りあるか。
- (4) a_1, a_2 がともに偶数となるような6枚のカードの並べ方は何通りあるか。
- (5) a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 がすべて偶数となるような6枚のカードの並べ方は何通りあるか。

4

$f(x) = xe^x$, $g(x) = x^2e^x$ とする。ただし, e は自然対数の底である。 $f(x)$, $g(x)$ の第 n 次導関数をそれぞれ $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。以下の間に答えよ。

(1) $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x)$ を求めよ。

(2) $f^{(n)}(x)$ を推測し、それが正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。また、曲線 $y = f^{(n)}(x)$ と x 軸の共有点の個数を求めよ。

(3) $g^{(n)}(x)$ は、実数 p_n , q_n を用いて $g^{(n)}(x) = (x^2 + p_n x + q_n)e^x$ と表せることを数学的帰納法を用いて示せ。

(4) $g^{(n)}(x)$ を求めよ。また、曲線 $y = g^{(n)}(x)$ と x 軸の共有点の個数を求めよ。

5 O を原点とする複素数平面上で、 $OA = \sqrt{3}$ となる点 A をとる。点 A を O を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点を B とする。このとき、正三角形となる $\triangle OAB$ の頂点 A , B を表す複素数をそれぞれ α , β とする。また、辺 AB の中点を M , $\triangle OAB$ の重心を G とする。以下の間に答えよ。

- (1) 点 M と点 G を表す複素数を、それぞれ α , β を用いて表せ。
- (2) β を α を用いて表せ。
- (3) 点 G を表す複素数の実部が正、虚部が $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ であるとき、 $\alpha + \beta$ の虚部を求めよ。さらに、 $\alpha + \beta$ の実部を求めよ。