

# 数 学

教育学部 [数学(口)]

医学部医学科

工学部

応用生物科学部 [数学(口)]

## 問 題 冊 子

### 注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子は 5 ページで、解答用紙は 5 枚である。  
落丁、乱丁、印刷不鮮明などの箇所があった場合には、ただちに試験監督者に申し出ること。
3. 受験番号は、5 枚の解答用紙のそれぞれの指定箇所に必ず記入すること。
4. 問題は、大問 5 題である。
5. 大問の配点比率は全て 20 % である。
6. 解答は、解答用紙の指定箇所に記入すること。ただし、やむをえない場合は裏面にまわってよいが、表面に「裏に続く」と明記すること。
7. 問題用紙の余白は計算に用いてよい。
8. 解答用紙は持ち帰らないこと。
9. 問題冊子は持ち帰ること。

1  $a, b, c$  をそれぞれ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 のうちいずれか 1 つの数とする。ただし,  $a, b, c$  のうち, 等しい数があってもよいこととする。以下の間に答えよ。

(1)  $(b - a)(c - b)(a - c) \neq 0$  を満たす  $(a, b, c)$  は何通りあるか。

(2)  $(b - a)(c - b) > 0$  を満たす  $(a, b, c)$  は何通りあるか。

(3)  $(b - a)(c - b) < 0$  を満たす  $(a, b, c)$  は何通りあるか。

(4)  $(b - a)(c - b)(a - c) > 0$  を満たす  $(a, b, c)$  は何通りあるか。

2  $n$  を自然数,  $x, y$  を正の実数とする。以下の間に答えよ。ただし, 必要ならば  $0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$ ,  $0.477 < \log_{10} 3 < 0.478$  を用いてよい。

(1) 相加平均と相乗平均の関係  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$  が成り立つことを示せ。

(2)  $\frac{1}{2}(\log_{10} x + \log_{10} y) \leq \log_{10} \left(\frac{x+y}{2}\right)$  が成り立つことを示せ。

(3)  $k$  を  $k \leq n$  を満たす自然数とする。  $\frac{1}{2}(\log_{10} k + \log_{10}(n+1-k)) \leq \log_{10} \left(\frac{n+1}{2}\right)$  が成り立つことを示せ。

(4)  $\log_{10}(n!) \leq n \log_{10} \left(\frac{n+1}{2}\right)$  が成り立つことを示せ。

(5)  $2024!$  の桁数は 6100 以下であることを示せ。

3  $0 < s < 1$ ,  $0 < t < 1$  とする。正六角形 ABCDEF において、 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$  とし、AB を  $s : (1 - s)$  に内分する点を P, CD を  $t : (1 - t)$  に内分する点を Q, EP と FQ の交点を I とする。以下の問に答えよ。

(1)  $\overrightarrow{FE}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{c}$  を用いて表せ。

(2)  $\overrightarrow{FQ}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{c}$ ,  $t$  を用いて表せ。

(3)  $\overrightarrow{FI} = k\overrightarrow{FQ}$ ,  $\overrightarrow{EI} = m\overrightarrow{EP}$  とする。 $k$ ,  $m$  を  $s$ ,  $t$  を用いてそれぞれ表せ。

(4)  $\triangle EFI$  と  $\triangle PQI$  の面積をそれぞれ  $S$ ,  $S'$  とする。 $s + t = 1$  を満たしながら点 P, 点 Q が動くとき、 $\frac{S}{S'}$  のとり得る値の範囲を求めよ。

**4** 関数  $f(x) = x^2 - 1 - 2x \log x$  ( $x > 0$ ) を考える。以下の問に答えよ。  
ただし、 $\log x$  は  $x$  の自然対数である。

(1) 関数  $f(x)$  を微分せよ。

(2) 曲線  $y = f(x)$  の変曲点の座標を求めよ。

(3) 曲線  $y = f(x)$ ,  $x$  軸, および 2 直線  $x = \frac{1}{2}$ ,  $x = 2$  で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

5 数列  $\{a_n\}$  と  $\{b_n\}$  が,

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{4}a_n - \frac{1}{4}b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{\sqrt{3}}{4}b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。複素数  $z_n$  を  $z_n = a_n + ib_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) で定める。以下の問に答えよ。  
ただし、 $i$  は虚数単位とする。

- (1) 複素数  $z_1$  の絶対値  $|z_1|$  と偏角  $\theta_1$  ( $0 \leq \theta_1 < 2\pi$ ) を、それぞれ求めよ。
- (2) すべての自然数  $n$  に対して

$$z_{n+1} = r(\cos \theta + i \sin \theta)z_n$$

となるような正の実数  $r$  と  $\theta$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) の値を、それぞれ求めよ。

- (3)  $a_n$  と  $b_n$  を  $n$  を用いてそれぞれ表せ。
- (4)  $a_n = b_n$  となる自然数  $n$  を小さいほうから順に  $m(1), m(2), m(3), \dots$  とする。  
 $a_{m(k)}$  を  $k$  を用いて表せ。