令 和 8 年 度
後 期 日 程

数　　　学

工学部

問 題 冊 子

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子は５ページで，解答用紙は５枚である。
落丁，乱丁，印刷不鮮明などの箇所があった場合には，ただちに試験監督者に申し出ること。
3. **受験番号は，５枚の解答用紙のそれぞれの指定箇所に必ず記入すること。**
4. 問題は，大問５題である。
5. **大問の配点比率は全て 20 ％ である。**
6. **解答は，解答用紙の指定箇所に記入すること。ただし，やむをえない場合は裏面にまわってよいが，表面に「裏に続く」と明記すること。**
7. 問題用紙の余白は計算に用いてよい。
8. 解答用紙は持ち帰らないこと。
9. 問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ z を複素数，$\bar{z}$ を z と共役な複素数とする。z に関する次の方程式を考える。

$$z^2 + 4z\bar{z} + \bar{z}^2 = 12 \qquad \cdots\cdots(*)$$

以下の問に答えよ。ただし，i を虚数単位とする。

(1) z が方程式(＊)を満たすとし，実数 x，y を用いて $z = x + yi$ と表す。x，y が満たす関係式を求めよ。

(2) 複素数平面上において，方程式(＊)を満たす z の全体が表す図形の概形を描け。

(3) 方程式 $|z - 2i| + |z + 2i| = 2\sqrt{6}$ を満たす z は方程式(＊)を満たすことを示せ。

(4) z が方程式(＊)を満たすとき，実数 $z\bar{z} + z + \bar{z}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

2 aを実数とする。Cを

$$y = (x^2 + a)e^x$$

で表される曲線とする。C上の点Pのx座標をp（$p < 0$）とし，Pを接点とするCの接線をℓとする。以下の問に答えよ。ただし，eは自然対数の底とする。

(1) ℓの方程式を求めよ。

(2) $a = 0$とする。ℓが原点を通るとき，pを求めよ。

(3) aは実数とし，ℓは原点を通るとする。ℓの傾きをkとする。aとkをpを用いてそれぞれ表せ。

(4) aは実数とし，ℓは原点を通るとする。ℓの傾きをkとする。kが最小値をとるときのpの値を求めよ。

(5) $a = 0$とする。ℓが原点を通るとき，ℓとCに囲まれた部分の面積を求めよ。

3 △ABC の内接円の半径が 1 であるとする。△ABC の内心を P とする。P から辺 BC, CA, AB の各辺へ垂線を下ろしたときの交点をそれぞれ D, E, F とする。また, $\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{PD}} = \vec{d}$, $\overrightarrow{\mathrm{PE}} = \vec{e}$, $\overrightarrow{\mathrm{PF}} = \vec{f}$ とする。以下の問に答えよ。

(1) $|\vec{d} + \vec{e} + \vec{f}|^2$ を内積 $\vec{d} \cdot \vec{e}$, $\vec{e} \cdot \vec{f}$, $\vec{f} \cdot \vec{d}$ を用いて表せ。

(2) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\vec{d} \cdot \vec{e} + \vec{e} \cdot \vec{f} + \vec{f} \cdot \vec{d} \geqq -\frac{3}{2}$$

(3) △APE と △APF が合同であることを示せ。

(4) $\vec{a}$ を $\vec{e}$, $\vec{f}$ と内積 $\vec{e} \cdot \vec{f}$ を用いて表せ。

(5) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{|\vec{a}|^2} + \frac{1}{|\vec{b}|^2} + \frac{1}{|\vec{c}|^2} \geqq \frac{3}{4}$$

4 $0 < t < 1$ とする。xy 平面上の円

$$C : x^2 + y^2 = 1$$

と点 A$(t,\ 1)$, B$(t-1,\ 1)$を考える。点 A を通る円 C の接線のうち，傾きが 0 でないものを ℓ とする。直線 ℓ と y 軸の交点を D とする。以下の問に答えよ。

(1) $p,\ q,\ r$ を実数とし，$p \neq 0$ または $q \neq 0$ を満たすとする。原点 O と直線 $px + qy + r = 0$ の距離 d を $p,\ q,\ r$ を用いて表せ。

(2) 直線 ℓ の方程式を求めよ。

(3) ℓ と x 軸のなす角を $\theta\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。$\sin\theta$ を t を用いて表せ。

(4) $\triangle$ABD の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。

(5) (4) で求めた $S(t)$ に対して，定積分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{S(t)}{t^2}\,dt$ の値を求めよ。

$\boxed{5}$ 以下の問に答えよ。

(1) $0 \leqq x < \pi$ のとき，不等式 $\sin(2x)\cos(2x) \geqq 0$ を解け。

(2) $0 \leqq x < \pi$ のとき，不等式 $\sin(2x) + \cos(2x) < 0$ を解け。

(3) x が (1) で求めた範囲にあるとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$1 \leqq \left|\sin(2x) + \cos(2x)\right| \leqq \sqrt{2}$$

(4) $t = \sin(2x) + \cos(2x)$ とする。$\sin(2x)\cos(2x)$ を t を用いて表せ。

(5) (1) で求めた範囲を定義域とする関数

$$f(x) = \frac{\sin(2x)\cos(2x)}{\sin(2x) + \cos(2x)}$$

を考える。$f(x)$ の最大値，最小値とそのときの x の値をそれぞれ求めよ。