令和７年度
後期日程

数　　　　学

工学部

問　題　冊　子

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子は５ページで，解答用紙は５枚である。
   落丁，乱丁，印刷不鮮明などの箇所があった場合には，ただちに試験監督者に申し出ること。
3. **受験番号は，５枚の解答用紙のそれぞれの指定箇所に必ず記入すること。**
4. 問題は，大問５題である。
5. **大問の配点比率は全て 20 ％ である。**
6. **解答は，解答用紙の指定箇所に記入すること。ただし，やむをえない場合は裏面にまわってよいが，表面に「裏に続く」と明記すること。**
7. 問題用紙の余白は計算に用いてよい。
8. 解答用紙は持ち帰らないこと。
9. 問題冊子は持ち帰ること。

1 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = a_n + 2n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
$$b_1 = 6, \quad b_{n+1} = b_n + 6(n+1)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問に答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ。

(3) $c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ とする。このとき，$c_n > c_{n+1}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)} - \frac{2}{k(k+1)(k+2)}\right\}$ を求めよ。

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k-2}{k+2}\left(\frac{1}{a_{k+1}}\right)\right\}$ を求めよ。

2 関数 $f(x)=\frac{1}{4}x^2-1\ (x \geqq 0)$ を考える。$f(x)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ と表し，xy 平面上の点 $(a,\ f^{-1}(a))$ を P とする。ただし，$a>0$ とする。以下の問に答えよ。

(1) $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y=f^{-1}(x)$ 上の点 P における接線と x 軸とのなす角を θ とする。ただし，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。$\tan 2\theta$ を a を用いて表せ。

(3) θ は (2) で定めた角とする。また，点 P を通り，傾きが $\tan 2\theta$ の直線を ℓ とする。ℓ は原点を通ることを示せ。

(4) 点 P を通り，傾きが -1 の直線を考える。この直線と曲線 $y=f(x)$ との交点を Q とする。線分 PQ の長さが $\sqrt{2}$ となる a の値をすべて求めよ。

(5) ℓ は (3) の直線とし，a は (4) で求めた a の値の中で最小のものとする。このとき，曲線 $y=f^{-1}(x)$ と x 軸，および直線 ℓ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

3　Aは正の定数とする。2つの曲線

$$C_1 : y = \sin x \qquad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$
$$C_2 : y = A\cos x \qquad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$

で囲まれた図形を考える。この図形の $y \geqq 0$ にある部分の面積を S とし，$y \leqq 0$ にある部分の面積を T とする。また，C_1 と C_2 の交点の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha < \beta)$ とする。以下の問に答えよ。

(1)　$\cos\alpha$ と $\cos\beta$ を A を用いてそれぞれ表せ。

(2)　S を A を用いて表せ。

(3)　$S = 2T$ となるような定数 A の値を求めよ。

4 $k > 0$, $t > 0$ とする。O を原点とする xy 平面上の直線 ℓ と円 C

$$\ell : y = k(x + t)$$
$$C : x^2 + y^2 = 4$$

が異なる 2 点で交わっているとし，それらの交点を x 座標の値が小さい方から A，B とする。以下の問に答えよ。

(1) $t > 2$ のとき，k のとりうる値の範囲を t を用いて表せ。

(2) $\triangle$OAB の面積 S を k と t を用いて表せ。

(3) $t = 2\sqrt{2}$ とする。線分 AB を直径とする円が O を通るとき，k の値を求めよ。

(4) 線分 AB の中点が直線 $x + y = 0$ 上にあるとき，k の値を求めよ。

(5) 線分 AB を直径とする円が x 軸の負の部分と y 軸の正の部分の両方ともに接するとき，k と t の値をそれぞれ求めよ。

5 実数 α, β は, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, および

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{7}{8}, \qquad \tan \alpha = \frac{1 - \sin \beta}{\cos \beta}$$

を満たすとする。また，関数

$$f(x) = (\sin^2 x) \log_2\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) + (\cos^2 x) \log_2\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える。以下の問に答えよ。

(1) $\sin \alpha \cos \alpha$ の値を求めよ。

(2) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ の値をそれぞれ求めよ。

(3) $\sin \beta$, $\cos \beta$ の値をそれぞれ求めよ。

(4) $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とする。$f'(x) = 0$ となる x を求めよ。

(5) θ を(4)で求めた x の値とする。$f(\beta) < f(\theta)$ が成り立つことを示せ。