

数 学

工学部

問 題 冊 子

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子は 5 ページで、解答用紙は 5 枚である。
落丁、乱丁、印刷不鮮明などの箇所があった場合には、ただちに試験監督者に申し出ること。
3. 受験番号は、5 枚の解答用紙のそれぞれの指定箇所に必ず記入すること。
4. 問題は、大問 5 題である。
5. 大問の配点比率は全て 20 % である。
6. 解答は、解答用紙の指定箇所に記入すること。ただし、やむをえない場合は裏面にまわってよいが、表面に「裏に続く」と明記すること。
7. 問題用紙の余白は計算に用いてよい。
8. 解答用紙は持ち帰らないこと。
9. 問題冊子は持ち帰ること。

1 k を実数とする。 x についての方程式

$$\sin 3x - \cos 3x + k(\sin x + \cos x) = 0 \quad \dots(*)$$

を考える。 $t = \sin x + \cos x$ とする。以下の問に答えよ。

- (1) $\sin 3x$ を $\sin x$ を用いて表せ。
- (2) t のとり得る値の範囲を求めよ。
- (3) $\sin x \cos x$ を t を用いて表せ。
- (4) $\sin 3x - \cos 3x$ を t を用いて表せ。
- (5) 方程式(*)の $0 \leq x < 2\pi$ における解が2個である k の値の範囲を求めよ。

2 正四面体OABCを考える。OAを1:2に内分する点をP, OBを2:1に内分する点をQとし, P, Qを通る平面 α を考える。平面 α が平面OABと異なるとき, 正四面体OABCは平面 α によって2つの部分に分けられる。このとき, Oを含む側の部分の体積を V_1 , Oを含まない側の部分の体積を V_2 とおく。以下の問に答えよ。

- (1) 平面 α がP, Q, Cを通るとき, $V_1 : V_2$ を求めよ。
- (2) OCを1:2に内分する点をDとおく。平面 α がP, Q, Dを通るとき, $V_1 : V_2$ を求めよ。
- (3) Oから平面ABCに垂線を下ろし, その垂線と平面ABCとの交点をHとする。
 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とおく。OHを \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。
- (4) Hを(3)の点とし, OHの中点をMとおく。平面 α がP, Q, Mを通るとき, $V_1 : V_2$ を求めよ。

3 楕円 $x^2 + \frac{y^2}{5} = 1$ を x 軸方向に $\frac{1}{2}$ だけ平行移動した曲線の $x \leq \frac{1}{2}$ の部分を C とする。 C と y 軸との交点のうち y 座標が正のものを A とする。点 A における C の接線を ℓ とし、 C と ℓ および x 軸で囲まれた図形を D とする。以下の間に答えよ。

- (1) 点 A の座標を求めよ。
- (2) 接線 ℓ の方程式を求めよ。
- (3) D を xy 平面に図示せよ。
- (4) D を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

4 xy 平面上の曲線 $C: y = x^3 - x$ を考える。 C 上の点 $A(1, 0)$ における接線を ℓ_1 とし、 ℓ_1 と y 軸との交点を P とする。 また xy 平面上の点 (x, y) は複素数 $x + yi$ に対応しているとする。 以下の問に答えよ。 ただし、 i は虚数単位とする。

(1) 直線 ℓ_1 の方程式を求めよ。

(2) 点 A を中心に反時計回りに点 P を $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転した点 Q に対応している複素数を求めよ。

(3) 点 A を中心に反時計回りに直線 ℓ_1 を $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転した直線 ℓ_2 の方程式を求めよ。

(4) (3) の直線 ℓ_2 と y 軸の交点を B とする。 平面上に点 E をとる。 点 E を中心に反時計回りに (2) の点 Q を $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点が点 B と一致したとする。 このとき点 E の座標を求めよ。

(5) 直線 ℓ_1 と直線 BE の交点を F とする。 $\triangle QBE$ の面積と $\triangle ABF$ の面積の比を求めよ。 ただし、 Q, B, E は (2), (4) で定めた点である。

5 次の関数を考える。

$$f(x) = x - \sin x - \frac{1}{6}x^3$$

$$g(x) = x - \sin x - \frac{1}{6}\sin^3 x$$

以下の問に答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ と $g(x)$ を、それぞれ微分せよ。
- (2) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の最大値、および、そのときの x の値を求めよ。
- (3) $x \geq 0$ のとき、不等式 $f(x) \leq 0$ が成り立つことを示せ。
- (4) $x \geq 0$ のとき、不等式 $g(x) \geq 0$ が成り立つことを示せ。
- (5) $x > 0$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{6} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 \leq \frac{x - \sin x}{x^3} \leq \frac{1}{6}$$