

令和 5 年度

前期日程

数学

教育学部 [数学(イ)]

地域科学部

医学部看護学科

応用生物科学部 [数学(イ)]

社会システム経営学環

問題冊子

注意事項

- 試験開始の合図があるまで、問題冊子を開かないこと。
- 本冊子は 5 ページで、解答用紙は 5 枚である。
落丁、乱丁、印刷不鮮明などの箇所があった場合には、ただちに試験監督者に申し出ること。
- 受験番号は、5 枚の解答用紙のそれぞれの指定箇所に必ず記入すること。
- 問題は、大問 5 題である。
- 大問の配点比率は全て 20 % である。
- 解答は、解答用紙の指定箇所に記入すること。ただし、やむをえない場合は裏面にまわってよいが、表面に「裏に続く」と明記すること。
- 問題用紙の余白は計算に用いてよい。
- 解答用紙は持ち帰らないこと。
- 問題冊子は持ち帰ること。

1

1辺の長さが1の正四面体OABCがある。辺ABを1:2に内分する点をP、線分OPをs:(1-s)に内分する点をQとする。 $\triangle ABC$ の重心をGとする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。以下の間に答えよ。

- (1) \overrightarrow{OQ} , \overrightarrow{QG} をs, \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いてそれぞれ表せ。
- (2) $\overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{QG}$ であるとき, sの値を求めよ。
- (3) sを(2)で求めた値とするとき, $\triangle OQG$ の面積を求めよ。
- (4) sを(2)で求めた値とするとき, $\tan(\angle OGQ + \angle OPG)$ の値を求めよ。

2 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = (\sqrt{2} - 1)a_n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。このとき、 a_n は整数 p_n, q_n を用いて

$$a_n = p_n + \sqrt{2}q_n$$

と表せる。以下の間に答えよ。

(1) p_1, p_2, q_1, q_2 を求めよ。

(2) p_{n+1}, q_{n+1} を p_n と q_n を用いてそれぞれ表せ。

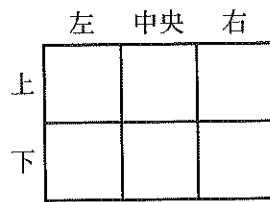
(3) $b_n = a_n - (2 + \sqrt{2})$ とする。 b_{n+1} を b_n を用いて表せ。また、 b_n を n を用いて表せ。

(4) $c_n = p_n - \sqrt{2}q_n$ とする。 c_{n+1} を c_n を用いて表せ。

(5) p_n, q_n を n を用いてそれぞれ表せ。

- 3** 下図のように、縦2列、横3列に並んだ6つのマスがある。また、1, 2, 3, 4, 5, 6の6個の数字がそれぞれ書かれたカードが1枚ずつある。すべてのカードを各マスに1枚ずつ置いていき、6つのマスに6枚のカードを並べる。上列の3つの数の積を a_1 、下列の3つの数の積を a_2 、左列の2つの数の積を b_1 、中央列の2つの数の積を b_2 、右列の2つの数の積を b_3 とする。

以下の間に答えよ。



- (1) a_1 が奇数となるような6枚のカードの並べ方は何通りあるか。
- (2) a_1 が偶数となるような6枚のカードの並べ方は何通りあるか。
- (3) b_1 が偶数となるような6枚のカードの並べ方は何通りあるか。
- (4) a_1, a_2 がともに偶数となるような6枚のカードの並べ方は何通りあるか。
- (5) a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 がすべて偶数となるような6枚のカードの並べ方は何通りあるか。

4

p を実数とし, $f(x) = x^3 - 3x^2 + p$ とおく。以下の間に答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ の増減を調べ, $f(x)$ の極値を求めよ。
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつとき, p のとり得る値の範囲を求めよ。
- (3) $f(1) = 0$ のとき, p が(2)で求めた範囲にあることを示せ。
- (4) (3)のとき, 方程式 $f(x) = 0$ の 1 以外の実数解を α, β ($\alpha < 1 < \beta$) とする。 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ の値を求めよ。
- (5) (4)のとき, $\alpha \leq x \leq 1$ において x 軸と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積を S_1 とし, $1 \leq x \leq \beta$ において x 軸と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積を S_2 とする。 $S_1 = S_2$ となることを示せ。

5

n, x を 2 以上の整数とする。各 n に対して、

$$-1 \leq \log_n x - 6 \log_x n \leq 1 \quad \cdots \cdots (*)$$

をみたす x の個数 S_n を考える。以下の間に答えよ。

- (1) $\log_2 k - 6 \log_k 2 = -1$ をみたす 2 以上の整数 k を求めよ。
- (2) $n = 2$ のとき (*) をみたし、かつ $\log_2 x$ が整数となる x をすべて求めよ。
- (3) S_n を n を用いて表せ。
- (4) $10 \leq S_n \leq 100$ となる n をすべて求めよ。