

令和 5 年度  
後期日程

# 数学

工学部

## 問題冊子

### 注意事項

- 試験開始の合図があるまで、問題冊子を開かないこと。
- 本冊子は 5 ページで、解答用紙は 5 枚である。  
落丁、乱丁、印刷不鮮明などの箇所があった場合には、ただちに試験監督者に申し出ること。
- 受験番号は、5 枚の解答用紙のそれぞれの指定箇所に必ず記入すること。
- 問題は、大問 5 題である。
- 大問の配点比率は全て 20 % である。
- 解答は、解答用紙の指定箇所に記入すること。ただし、やむをえない場合は裏面にまわってよいが、表面に「裏に続く」と明記すること。
- 問題用紙の余白は計算に用いてよい。
- 解答用紙は持ち帰らないこと。
- 問題冊子は持ち帰ること。

1

O を  $xy$  平面の原点とする。橢円  $x^2 + 2y^2 = 2$  を  $C$  とする。第1象限内の  $C$  上に点 P をとり、その座標を  $P(p, q)$  とする。さらに、第2象限内の  $C$  上に点 S を  $OP \perp OS$  となるようにとり、その座標を  $S(s, t)$  とする。以下の間に答えよ。

- (1)  $s^2, t^2$  を  $p, q$  を用いてそれぞれ表せ。
- (2)  $u = p^2$  とおく。 $OP^2 \cdot OS^2$  を  $u$  を用いて表せ。また、 $\triangle OPS$  の面積  $A$  を  $u$  を用いて表せ。
- (3) P が第1象限内の  $C$  上を動くとき、 $A$  の最小値を求めよ。

## 2

## 関数

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

を考える。以下の間に答えよ。

- (1)  $x = \tan y \left( -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right)$  と表すとき,  $f(x) = y$  が成り立つことを示せ。
- (2) 曲線  $y = f(x)$  の点  $P(\sqrt{3}, f(\sqrt{3}))$  における接線の方程式を求めよ。
- (3) (2) で求めた接線と曲線  $y = f(x)$  ( $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ ) の共有点が点  $P$  だけであることを示せ。
- (4) (2) で求めた接線と  $y$  軸, および曲線  $y = f(x)$  ( $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ ) によって囲まれた部分の面積を求めよ。

## 3

## 定積分

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を考える。ただし、 $e$  を自然対数の底とする。以下の間に答えよ。

- (1)  $I_1, I_2$  を求めよ。
- (2)  $I_n$  は 2 つの整数  $a_n, b_n$  を用いて  $I_n = a_n + b_n e$  と表せることを数学的帰納法を用いて示せ。
- (3) (2) における  $b_n$  について、 $n \geq 3$  のとき、 $b_n$  は  $n - 1$  の倍数であることを示せ。
- (4)  $I_6, I_7$  を求めよ。また、 $2.71 < e < 2.72$  を示せ。

**4**  $r$  を  $0 < r < \frac{1}{2}$  をみたす実数とする。数列  $\{a_n\}$  が以下の条件をみたすとする。

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2}a_n = {a_{n+1}}^2 - r^n a_{n+1}a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、 $a_n > 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) が成り立つ。以下の間に答えよ。

- (1)  $a_3, a_4$  を求めよ。
- (2) 数列  $\{b_n\}$  を  $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$  で定める。 $b_{n+1} - b_n$  を  $r, n$  を用いて表せ。また、 $\{b_n\}$  の一般項を求めよ。
- (3)  $n \geq 2$  のとき、 $b_n \leq 1 - r$  が成り立つことを示せ。
- (4) 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。

5

$k, m$  を実数とする。 $y = kx - k^2 - m$  で表される  $xy$  平面内の直線を  $\ell$  とする。 $k$  が実数全体を動くとき、 $\ell$  が通過する領域を  $D_m$  とする。点  $(x, y)$  が領域  $D_m$  全体を動くとき、 $x^2 + y^2$  は最小値をもつ。その最小値を  $S(m)$  とおく。以下の間に答えよ。

- (1)  $\ell$  が原点を通るような  $k$  が存在するための  $m$  の条件を求めよ。
- (2) 領域  $D_m$  を不等式を用いて表せ。
- (3)  $S(4)$  の値と、その値をとるときの点  $(x, y)$  をすべて求めよ。
- (4)  $S(m)$  を求めよ。