

令和 3 年 度
前 期 日 程

数 学

教育学部 [数学(イ)]

地域科学部

医学部看護学科

応用生物科学部

社会システム経営学環

問 題 冊 子

注意事項

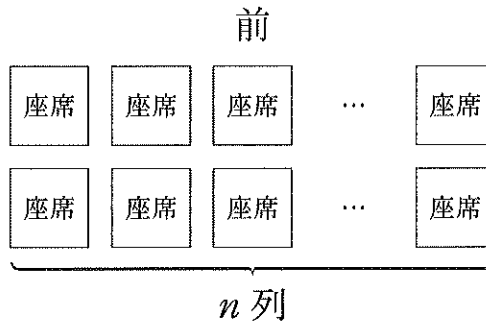
1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子は 5 ページで、解答用紙は 5 枚である。
落丁、乱丁、印刷不鮮明などの箇所があった場合には、ただちに試験監督者に申し出ること。
3. 受験番号は、5 枚の解答用紙のそれぞれの指定箇所に必ず記入すること。
4. 問題は、大問 5 題である。
5. 大問の配点比率は全て 20 % である。
6. 解答は、解答用紙の指定箇所に記入すること。ただし、やむをえない場合は裏面にまわってよいが、表面に「裏に続く」と明記すること。
7. 問題用紙の余白は計算に用いてよい。
8. 解答用紙は持ち帰らないこと。
9. 問題冊子は持ち帰ること。

1 空間の4点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(1, 1, 1)$ を頂点とする四面体 $OABC$ の体積を V とする。辺 BC の中点を M , 辺 AB を $t : (1 - t)$ に内分する点を P , 辺 AC を $u : (1 - u)$ に内分する点を Q , 四面体 $OMPQ$ の体積を V' とする。 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とする。以下の問に答えよ。

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$, $\vec{c} \cdot \vec{a}$ を求めよ。
- (2) $\triangle APQ$, $\triangle BPM$, $\triangle CQM$ の面積を, それぞれ t , u を用いて表せ。
- (3) $\frac{V'}{V}$ を t , u を用いて表せ。
- (4) $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{OM}$ であるとき, t を u を用いて表せ。
- (5) $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{OM}$ であるように点 P , Q がそれぞれ辺 AB , AC 上を動くとき, $\frac{V'}{V}$ の最大値を求めよ。

2

下図のように、縦 2 列、横 n 列に並んだ合計 $2n$ 席の座席があり、その中から k 席の座席を選ぶ。ただし、選んだ座席の前後左右に隣接する座席は選ばないこととする。以下の問に答えよ。



- (1) $k = n$ のとき、座席の選び方は何通りあるか。
- (2) $n \geq 3$, $k = n - 1$ とする。右端から 2 列目の前後 2 席がどちらも選ばれていないような、座席の選び方は何通りあるか。
- (3) $n \geq 3$, $k = n - 1$ のとき、座席の選び方は何通りあるか。
- (4) $n \geq 5$, $k = n - 2$ のとき、座席の選び方は何通りあるか。

3

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = 4 - \frac{4}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

また、数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = na_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。以下の問に答えよ。

- (1) b_1, b_2, b_3, b_4 を求めよ。
- (2) b_{n+1} を b_n と n を用いて表せ。
- (3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を推測して、それを数学的帰納法を用いて示せ。
- (4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。
- (5) 数列 $\{c_n\}$ を $c_1 = a_1, c_2 = a_1a_2, c_3 = a_1a_2a_3$, 以下 $c_n = a_1a_2\cdots a_n$ ($n = 4, 5, 6, \dots$) で定める。 $\sum_{k=1}^n c_k$ を求めよ。

4 関数

$$f(x) = 4^x + 4^{-x} - 6 \cdot 2^x - 6 \cdot 2^{-x} + 2$$

を考える。以下の問に答えよ。

(1) 不等式 $2^x + 2^{-x} \geq 2$ が成り立つことを示せ。また、等号が成立する x の値を求めよ。

(2) $t = 2^x + 2^{-x}$ とする。 $f(x)$ を t を用いて表せ。

(3) 等式

$$s + \frac{1}{s} = 6$$

を満たすような正の実数 s の値を求めよ。

(4) 方程式 $f(x) = 0$ を解け。

5 以下の問〔Ⅰ〕と問〔Ⅱ〕に答えよ。

〔Ⅰ〕 関数

$$f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 25$$

を考える。

- (1) $f'(x)$ を求めよ。
- (2) 方程式 $f'(x) = 0$ を解け。
- (3) 関数 $f(x)$ の増減表を作り、極値を求めよ。

〔Ⅱ〕 xy 平面上に点 $(0, 5)$ を中心とする半径 r ($r \leq 5$) の円 C と放物線 $H: y = \frac{1}{4}x^2$ を考える。

- (1) 円 C と放物線 H の共有点の個数が 2 個のとき、半径 r の値および、共有点の座標を求めよ。
- (2) 〔Ⅱ〕の(1)で求めた円 C の外側と放物線 H の上側との共通部分のうち点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ を含む部分の面積を求めよ。